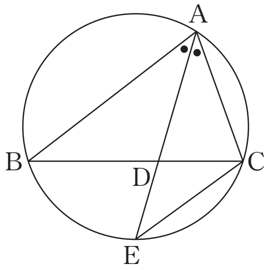
PART2　方べきの定理，内接四角形の性質

2

(1)　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

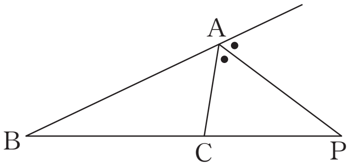
が成り立つことを証明せよ。必要に応じて，△ABC の ∠A の二等分線が外接円と交わる点を E とすると，△ABD ∽ △AEC であることを用いよ。



(2)　△ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を P とする。このとき

$$AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$$

が成り立つことを証明せよ。



Point Pickup

図形の証明問題においては，

・与えられた図形の性質やそこから導かれること

・三角形の合同や相似から導かれること

を用いながら，証明したい結論を導く。

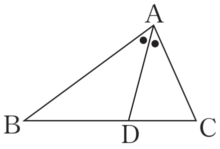
第 7 講　PART2　確認問題

1　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

が成り立つことを証明せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。



（証明）

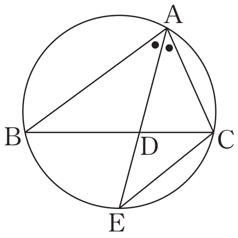
△ABC の外接円と直線 AD の交点のうち，A でないものを E とする。

△ABD と △AEC において

$$\angle BAD = \angle EAC$$

円周角の定理より

$$\angle ABD = \boxed{\text{ア}}$$



よって　△ABD ∽ △AEC

ゆえに　$AB : \boxed{\text{イ}} = AD : AC$

よって　$AD \cdot \boxed{\text{イ}} = AB \cdot AC$　……(＊)

また，方べきの定理より　$DA \cdot \boxed{\text{ウ}} = DB \cdot DC$

よって　$AD \cdot \boxed{\text{ウ}} = BD \cdot CD$　……(＊＊)

(＊)－(＊＊)より

$$AD \cdot \boxed{\text{イ}} - AD \cdot \boxed{\text{ウ}} = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

$$AD \cdot \boxed{\text{エ}} = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

ゆえに　$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

[ア の選択肢]

① ∠ACD　② ∠ADC

③ ∠AEC　④ ∠ECD

[イ ～ エ の選択肢]

① AC　② AD　③ AE

④ BD　⑤ EC　⑥ DE

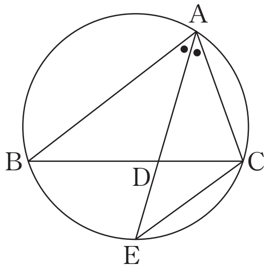
[MEMO]

PART2　方べきの定理，内接四角形の性質

2　(1)　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

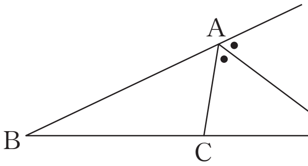
が成り立つことを証明せよ。必要に応じて，△ABC の ∠A の二等分線が外接円と交わる点を E とすると，△ABD∽△AEC であることを用いよ。



(2)　△ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を P とする。このとき

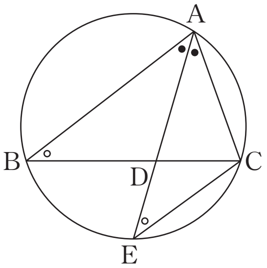
$$AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$$

が成り立つことを証明せよ。



(1)　△ABC の ∠A の二等分線が外接円と交わる点を E とすると，△ABD∽△AEC であるから

$AB : AE = AD : AC$　　　$AD \cdot AE = AB \cdot AC$ …… ①



また，方べきの定理より $DA \cdot DE = DB \cdot DC$

よって　$AD \cdot DE = BD \cdot CD$ …… ②

①－②より　$AD \cdot AE - AD \cdot DE = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

$AD \cdot (AE - DE) = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

ゆえに　$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

(2)　△ABC の外接円と直線 PA の交点のうち A でないものを Q とすると，

右図より　△ABQ∽△APCであるから

$AB : AP = AQ : AC$　　　$AP \cdot AQ = AB \cdot AC$ …… ①

また，方べきの定理より　$PA \cdot PQ = PC \cdot PB$

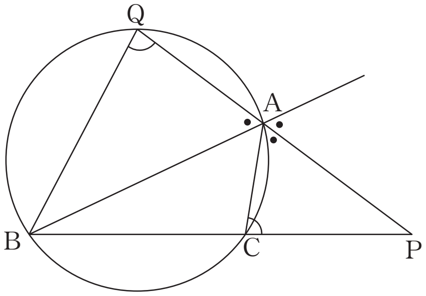
よって　$AP \cdot PQ = BP \cdot PC$ …… ②

②－①より

$$AP \cdot PQ - AP \cdot AQ = BP \cdot PC - AB \cdot AC$$

$$AP \cdot (PQ - AQ) = BP \cdot PC - AB \cdot AC$$

ゆえに　$AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$



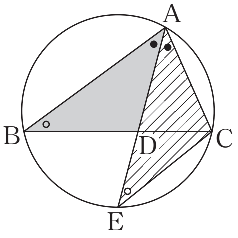
第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：③，ウ：⑥，エ：②

[解説]

△ABC の外接円と直線 AD の交点のうち，A でないものを E とする。



△ABD と △AEC において

∠BAD＝∠EAC

円周角の定理より

∠ABD＝∠**AEC**

よって　△ABD∽△AEC

ゆえに　AB：**AE**＝AD：AC

よって　AD・AE＝AB・AC　……(＊)

また，方べきの定理より　DA・**DE**＝DB・DC　[A]

よって　AD・DE＝BD・CD　……(＊＊)

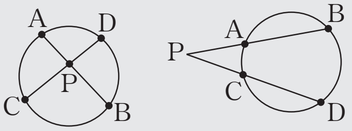
(＊)－(＊＊)より

AD・AE－AD・DE＝AB・AC－BD・CD

AD(AE－DE)＝AB・AC－BD・CD

AD・**AD**＝AB・AC－BD・CD

ゆえに　AD^2＝AB・AC－BD・CD

[A]　方べきの定理

PA・PB＝PC・PD